EMERGENCE

LA GRÈCE, BERCEAU DE LA DÉMONSTRATION

L'École d'Athènes, Raphaël (détail) : Platon et Aristote , Musée du Vatican

ARISTOTE (-384, -322) : Le père fondateur de la logique.

Il est le premier à chercher et trouver des principes pour la logique (la théorie des syllogismes, le principe de non contradiction, …)

Aristote dit le Starigide, est un élève de Platon à l'Académie d'Athènes, puis précepteur d'Alexandre le grand et fondateur du Lycée d'Athènes ; il s'intéresse aux arts et aux sciences (biologie, physique, …).

Dans l'"Organon", il introduit la notion de démonstration sur la base de "syllogismes", non pas en vue d'une application aux mathématiques, mais comme un instrument de précision de dialogues, de débats philosophiques. Pour lui, une preuve correcte est une preuve qui "gagne" contre toutes les réfutations possibles.

La totalité de son œuvre a été traduite en latin au XIIIe siècle à partir de l'arabe et a été largement commentée.

syllogisme

Tous les sportifs sont des humains
Tous les humains sont mortels.
Donc tous les sportifs sont mortels.

LES STOÏCIENS

(IIIe siècle avant J.C.)
Ils ont proposé des règles de raisonnement sur les connecteurs reliant les propositions.

Et avant ?

THALES de Milet

(-625,-546)
Il renonce aux dieux et aux forces magiques pour expliquer l'ordre du monde. Il privilégie l'observation et la démonstration. Celle de la hauteur d'une pyramide serait la première en géométrie.

PYTHAGORE

(-582,-500)
Pour lui, « Tout est nombre ». Il recherche, pour les entiers des propriétés spécifiques pour fonder la **théorie des nombres.** Il s'est intéressé au concept de nombre, de triangle et d'autres figures mathématiques et à l'idée abstraite de démonstration.

PLATON

(-427,-347)
fait émerger le caractère abstrait des mathématiques. Dans une démonstration, il rejette le recours à l'expérience. Il a insisté sur des définitions précises et des hypothèses claires.

et après ?

EUCLIDE

(-323, -265)
Dans les *Éléments*, synthèse des mathématiques de son temps**,** il pose des **axiomes** et des **postulats**. Puis il **démontre, chaque propriété à partir de celles précédemment démontrées.** Les règles de logique qu'il utilise sont pour la plupart implicites, celles d'Aristote et des stoïciens n'étant pas assez riches.

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Définition d'Aristote (*Topiques Livre I,1, 100a 25-27*)

*« Un **syllogisme** est une forme d'argumentation dans laquelle, certaines choses étant posées, une chose distincte de celles qui ont été posées s'ensuit nécessairement, par la vertu même de ce qui a été posé.*
*C'est une **démonstration** (apodeixis) lorsque les points de départ du syllogisme sont des affirmations vraies et premières, ou du moins des affirmations telles que la connaissance qu'on en a prend naissance par l'intermédiaire de certaines affirmations premières et vraies; (…) »*

Définition actuelle

Une démonstration est une chaîne dont le dernier maillon est la proposition à démontrer ; les premiers maillons sont les données (axiomes et hypothèses) ; on passe d'un maillon à l'autre en appliquant des règles admises au préalable.

Organon, Aristote, parchemin_Paris_fin XIII, BNF

Raisonnements connus et pratiqués par les grecs

Raisonnement par l'absurde

Raisonnement consistant à montrer l'impossibilité que la proposition soit fausse pour en conclure qu'elle est vraie.

***Euclide l'utilisa pour** montrer que, en termes actuels, $\sqrt{2}$ est irrationnel*

La dialectique

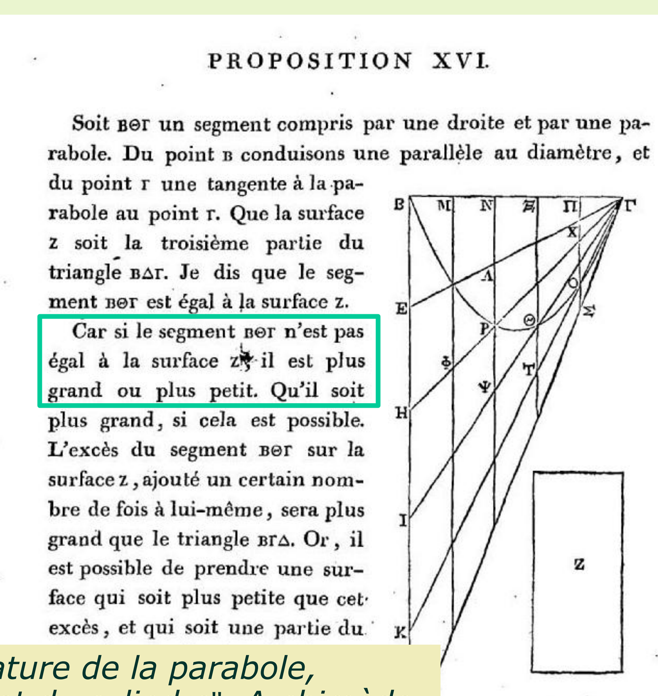
Raisonnement qui met en parallèle une thèse et son antithèse ; ces dernières étant défendues lors d'un dialogue entre deux interlocuteurs.

***Aristote l'utilisa pour** légitimer la loi (le 'principe') de non-contradiction et pour justifier que la Terre est ronde en réfutant qu'elle puisse être carré, triangulaire, ….*

Méthode d'exhaustion

Cette méthode de démonstration a été utilisée pendant plusieurs siècles pour le calcul d'aires, de volumes ... elle consiste à prouver qu'une grandeur cherchée ne peut ni excéder ni être inférieure à une certaine valeur. C'est l'ancêtre de la "méthode des indivisibles" et du "calcul intégral" (XVII^{e} siècle).

***Archimède l'utilisa pour** calculer l'aire sous un arc de parabole, pour approximer π, pour résoudre la quadrature de la parabole.*



PROPOSITION XVI.

Soit ΒΘΓ un segment compris par une droite et par une parabole. Du point Β conduisons une parallèle au diamètre, et du point Γ une tangente à la parabole au point Γ. Que la surface Ζ soit la troisième partie du triangle ΒΔΓ. Je dis que le segment ΒΘΓ est égal à la surface Ζ.

Car si le segment ΒΘΓ n'est pas égal à la surface Ζ, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit plus grand, si cela est possible. L'excès du segment ΒΘΓ sur la surface Ζ, ajouté un certain nombre de fois à lui-même, sera plus grand que le triangle ΒΓΔ. Or, il est possible de prendre une surface qui soit plus petite que cet excès, et qui soit une partie du

Quadrature de la parabole, "De la sphère et du cylindre", Archimède, trad. F. Peyrard, Paris 1807, Source Gallica.bnf.fr

Et si on supprimait quelques règles et axiomes utilisés par Euclide ?

En géométrie : sans le 5ème postulat (dit des parallèles) d'Euclide.

Géométries non euclidiennes

Application : Navigation maritime et aérienne

En se limitant à une et une seule utilisation des hypothèses, dans une démonstration.

Logique linéaire

Application : Gestion de données

Sans la règle du tiers exclu (validité d'une proposition ou de son contraire).

Logique intuitionniste

Application : Informatique

IREM Aix-Marseille
http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013