EMERGENCE

UN TEXTE FONDATEUR DES MATHÉMATIQUES

LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

À propos du livre I :

Tous les théorèmes et problèmes énoncés dans les différents livres s'enchaînent à partir des définitions, demandes (postulats*) et notions communes (axiomes**) énoncés au début du livre I.
On en donne ci-dessous quelques-unes, dans la traduction de Bernard Vitrac (1990).

23 DEFINITIONS

1. Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les limites d'une ligne sont des points.
5. Une surface est ce qui a seulement largeur et longueur.
6. Les limites d'une surface sont des lignes.
8. Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.
10. Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
11. Un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
15. Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles.
17. Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.
19. Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de quatre.
20. Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux ; isocèle celle qui a deux côtés égaux seulement ; scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
21. De plus, parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit ; obtusangle celle qui a un angle obtus ; acutangle, celle qui a trois angles aigus.
22. Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange est celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un rhomboïde, celle qui les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèze les quadrilatères autres que ceux- là.
23. Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

postulat : ce que l'auteur demande au lecteur d'accepter comme vrai dans le cadre de sa théorie.*
*axiome** : ce que l'auteur croit vrai (postulat de nature évidente)*

5 DEMANDES (postulats)

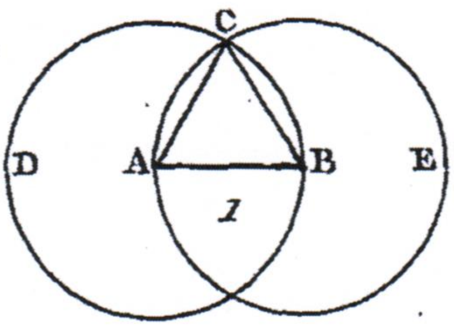
1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petit que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

9 NOTIONS COMMUNES (axiomes)

1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

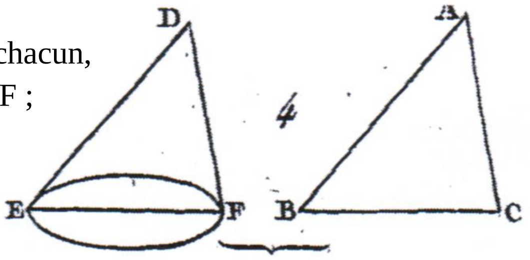
Quelques exemples de propositions :

PROPOSITION I.1 : PROBLÈME. Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.



Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral. Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE, et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB (dem. 1). Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA; mais il a été démontré que la droite CA était égale à la droite AB : donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB ; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles ; donc la droite CA est égale à la droite CB : donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles. Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB; ce qu'il fallait faire.

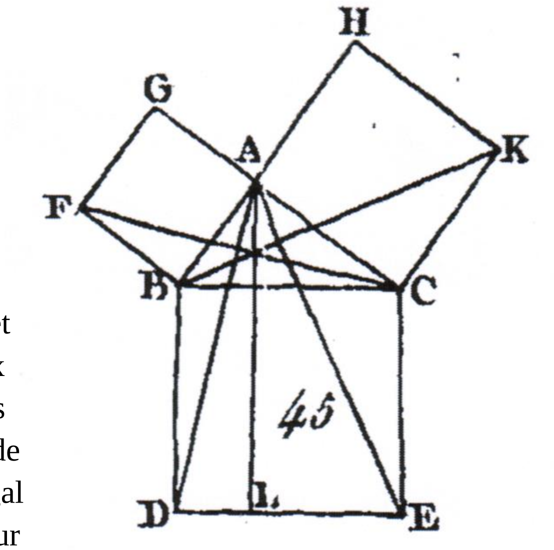
PROPOSITION IV. THÉORÈME. Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les côtés égaux est égal dans les deux triangles, la base de l'un sera égale à la base de l'autre; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles seront aussi égaux entre eux.



Soient les deux triangles ABC, DEF (fig. 4) dont les deux côtés AB, AC sont égaux aux deux côtés DE, DF chacun à chacun, savoir, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF ; que l'angle BAC soit aussi égal à l'angle EDF : je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF, et que les autres angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont aussi égaux chacun à chacun; l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE. Car si le triangle ABC est appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, la droite AB sur la droite DE, le point B tombera sur le point E, parce que la droite AB est égale à la droite DE ; mais la droite AB s'appliquant exactement sur la droite DE, la droite AG s'appliquera de même exactement sur la droite DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF ; le point C tombera sur le point F, parce que la ligne AC est égale à la ligne DF ; mais le point B tombe sur le point E : donc la base BC est égale à la base EF, car si le point B tombant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BG ne s'applique pas exactement sur la base EF, il faut nécessairement que deux lignes droites comprennent un espace, ce qui est impossible (axiome 12) ; donc la base BC s'appliquera exactement sur la base EF, et lui sera égale ; donc aussi le triangle entier ABC s'appliquera exactement sur le triangle entier DEF et lui sera égale. Par conséquent les autres angles de l'un des triangles s'appliqueront exactement sur les autres angles de l'autre triangle et seront par conséquent égaux aussi entre eux ; c'est- à-dire l'angle ABC sera égal l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE. Donc si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les côtés égaux est égal dans les deux triangles, la base de l'un sera égale à la base de l'autre ; ces deux triangles seront égaux, et les autres angles compris entre les côtés égaux des deux triangles seront aussi égaux entre eux ; ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII. THÉORÈME (le fameux théorème de Pythagore).

Dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés oui comprennent l'angle droit.



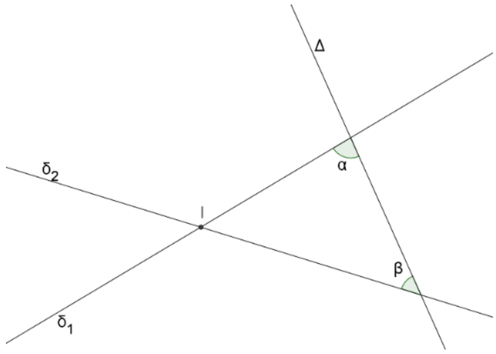
Soit ABC (fig. 45) un triangle rectangle dont l'angle droit est BAC : je dis que le carré construit sur le côté BC est égal aux carrés construits sur les côtés BA, AC. Construisez le carré BDEC sur le côté BC; construisez aussi les deux carrés GB, HC sur les côtés BA, AC, et par le point A conduisez une droite AL parallèle à l'une ou à l'autre des droites BD, CE, conduisez ensuite les droites Puisque chacun des angles BAC, BAG est droit et que les deux droites AC, AG, placées de part et d'autre de la droite BA, font au point A, avec la droite AB, deux angles de suite égaux à deux angles droits, la droite CA est dans la direction de la droite AG : la droite AB est dans la direction de la droite AH, par la même raison; et puisque l'angle DBC est égal à l'angle FBA (axiome 10), étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons un angle commun ABC, l'angle total DBA sera égal à l'angle total FBC ; mais les deux droites DB, BA étant égales aux deux droites CB, BF, chacune à chacune, et l'angle DBA égal à l'angle FBC, la base AD sera égale à la base FC, et le triangle ABD égal au triangle FBC (prop. 4). Or le parallélogramme BL est double du triangle ABD (prop. 41) car ils ont la même base BD et sont compris entre les mêmes parallèles BD, AL. Le carré GB est aussi double du triangle FBC, car ils ont la même base FB et sont compris entre les mêmes parallèles FB, GC, mais les quantités qui sont doubles de quantités égales sont égales entre elles : donc le parallélogramme BL est égal au carré GB. Ayant conduit les droites AE, BK, nous démontrerons de la même manière que le parallélogramme CL est égal au carré HC : donc le carré total BDEC est égal aux deux carrés GB, HC ; mais le carré BDEC est construit sur le côté BC, et les carrés GB, HC sont construits sur les côtés BA, AC : donc le carré BE, construit sur le côté BC, est égal aux carrés construits sur les côtés BA, AC. Donc dans les triangles rectangles, le carré construit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux deux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit ; ce qu'il fallait démontrer.

Le fameux cinquième postulat :

« Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petit que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. »

Soit dans notre langage moderne :

« Si une droite Δ coupe deux droites δ_1 et δ_2 en formant deux angles internes α et β dont la somme est inférieure à deux angles droits, alors δ_1 et δ_2 se coupent dans le demi-plan contenant ces deux angles. »



Or aujourd'hui, l'énoncé que nous appelons postulat d'Euclide et qui remplace l'énoncé précédent est tout autre :

« Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée ».

Que s'est-il donc passé ?

Pendant deux millénaires, de nombreux mathématiciens estimèrent que ce postulat était inutile car ils pensaient pouvoir le démontrer à partir des quatre autres postulats. Parmi eux on peut citer :

Ptolémée (II^{e} siècle), Archimède (III^{e} siècle av JC.), Proclus (V^{e} siècle), Alhazen (X^{e} siècle/XI^{e} siècle), Omar Khayyam (XI^{e} siècle), Thabit ibn Qurra (IX^{e} siècle), Nasir ad-Din al-Tusi (XII^{e} siècle), Giovanni Alfonso Borelli (XVII^{e} siècle), John Wallis (XVII^{e} siècle), Adrien-Marie Legendre (XVIII^{e} siècle/XIX^{e} siècle).

Pour ce faire, ils ont proposé des énoncés à peu près équivalents à la formulation d'Euclide (au sens qu'ils permettent de la même façon d'obtenir tous les autres résultats de la géométrie euclidienne)
Quelques exemples :
« Par trois points d'un plan, on peut toujours mener un cercle et un seul. »
« Il existe des quadrilatères à quatre angles droits. »
« Il existe des triangles semblables de toutes les tailles. » (Wallis)
« Il existe des triangles dont la somme des angles est égale à deux droits. » (Legendre)
Et surtout, l'énoncé que nous utilisons aujourd'hui qui est dû à Proclus (V^{e} siècle)

Au milieu du XIX^{e} siècle, on a montré que le cinquième postulat est bien indépendant des quatre autres, qu'il est vain de tenter de prouver le contraire et qu'il est indispensable pour la construction de la géométrie euclidienne.

RÉFÉRENCES

Les textes

1. Euclide « *Les Éléments, traduits du texte de Heiberg* », traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes. Paris : PUF, 1990 (vol.1), 1994 (vol.2), 1998 (vol.3), 2001 (vol.4).

2. « *Les éléments de géométrie d'Euclide* », traduction de François Peyrard, Paris 1804, disponible sur Gallica

3. « *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide* », traduction Henrion, Paris 1632 disponible sur Gallica

4. « *Euclidis elementa* », édition Heiberg (bilingue grec-latin), 1883 disponible sur http://www.wilbourhall.org/pdfs/HeibergEuclidVolumeVOL_I.pdf

Les articles

1. http://www.math93.com/euclide.htm#t1

2. Bernard Vitrac « *Les géomètres de la Grèce antique* », dossier disponible sur le site Culturemath http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-4.htm

3. « *L'idéal démonstratif des Éléments d'Euclide et les incertitudes philologiques du texte édité par Heiberg* ». Bernard Vitrac