



La branche des mathématiques que nous appelons aujourd'hui la trigonométrie a des origines lointaines. Des Égyptiens Antiques et des Babyloniens ont commencé à examiner les rapports des côtés de triangles semblables, mais ils n'y avaient aucun concept de mesure angulaire. Les mathématiciens-astronomes grecs ont commencé une étude systématique de relations entre des angles dans un cercle et les longueurs de cordes les sous-tendant.

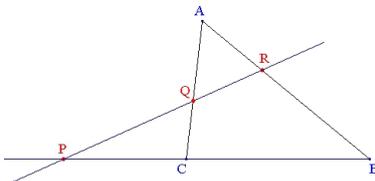
À Alexandrie, aux Ier et IIe siècles après J.C., Hipparque de Nicée (190-120 av.J.C.), Ménélaüs (vers 100 ap. J.C.) et Ptolémée (vers 90 - 168), reprennent et développent les travaux de leurs prédécesseurs en géométrie, en astronomie. C'est avec eux que naît ce que nous appelons aujourd'hui la trigonométrie.

- **HIPPARQUE DE NICÉE** est connu comme "le père de trigonométrie".



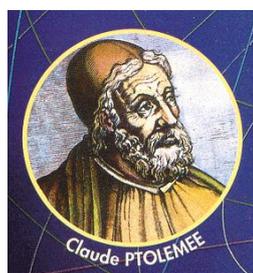
Il a établi la première table trigonométrique pendant la deuxième moitié du deuxième siècle av. J.-C. en vue d'une utilisation en astronomie. L'utilisation systématique du cercle de 360° semble probablement lui être due. Son travail nous est connu grâce à Ptolémée qui y fait référence dans l'Almageste.

- **MÉNÉLAÛS**, mathématicien et astronome grec, ayant vécu à Alexandrie au Ier-IIe siècle. Selon Ptolémée, il fit d'intéressantes observations célestes à Rome. On lui doit les premiers résultats de ce qu'on appellera au XVIe siècle la trigonométrie sphérique. Son nom est resté rattaché au théorème dit de "Menelaus" :



$$P, Q, R \text{ sont alignés si et seulement si : } \frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$$

- **CLAUDE PTOLÉMÉE** vécut au IIe siècle à Alexandrie. Il est l'un des mathématiciens le plus prolifique de l'antiquité, composants de remarquables synthèses.



Le plus célèbre de ses écrits est connu sous le nom d'*Almageste* déformation de la traduction arabe (*al-Mijisti : La Très Grande*) de son titre grec (*Composition mathématique*). Traduite en latin puis en arabe, l'*Almageste* fera autorité durant quatorze siècles, c'est ainsi que s'imposera une conception géocentrique de l'univers, jusqu'au XVIe siècle où Copernic, Galilée et Kepler reprendront et amélioreront la théorie héliocentrique d'Aristarque complètement tombée dans l'oubli.

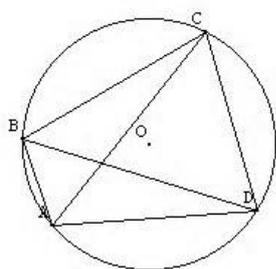


Dans l'*Almageste*, Ptolémée veut suivre une méthode rigoureuse (comme l'a fait Euclide en géométrie) ; il établit des démonstrations de ses propositions. Sa trigonométrie se fonde sur celle d'Hipparque, mais il a également connaissance de l'œuvre de Ménélaos, qui a développé la trigonométrie sphérique et qu'il cite dans l'*Almageste*.

L'approche de Ptolémée nécessitait de nouvelles techniques géométriques que l'on nomme aujourd'hui "trigonométrie", qu'il expose dans son premier livre, sous forme d'une table des cordes dans le cercle (proche de nos tables de sinus actuelles). Dans chaque cas, il explique comment il a construit ses tables.

Il divise la circonférence d'un cercle en 360 parties (degrés d'arcs) et le diamètre en 120 parties. Ptolémée construit ses tables à l'aide de quatre règles accompagnées de leurs démonstrations[5] qui donnent respectivement les formules permettant de calculer la corde sous-tendue par l'angle supplémentaire, la corde sous-tendue par l'angle moitié, les cordes sous-tendues par la différence ou la somme de deux angles.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES DE PTOLEMÉE											
TABLE DES CORDES						TABLE DES SINUS					
ANGLE	CORDE	SINUS	COSINUS	TANGENTE	COTANGENTE	ANGLE	SINUS	COSINUS	TANGENTE	COTANGENTE	ANGLE
0	0	0	120	0	∞	0	0	120	0	∞	0
1	1	1	119	1	119	1	1	119	1	119	1
2	4	4	118	4	118	4	4	118	4	118	4
3	9	9	117	9	117	9	9	117	9	117	9
4	16	16	116	16	116	16	16	116	16	116	16
5	25	25	115	25	115	25	25	115	25	115	25
6	36	36	114	36	114	36	36	114	36	114	36
7	49	35	113	49	113	35	35	113	49	113	35
8	64	40	112	64	112	40	40	112	64	112	40
9	81	45	111	81	111	45	45	111	81	111	45
10	100	50	110	100	110	50	50	110	100	110	50
11	121	55	109	121	109	55	55	109	121	109	55
12	144	60	108	144	108	60	60	108	144	108	60
13	169	65	107	169	107	65	65	107	169	107	65
14	196	70	106	196	106	70	70	106	196	106	70
15	225	75	105	225	105	75	75	105	225	105	75
16	256	80	104	256	104	80	80	104	256	104	80
17	289	85	103	289	103	85	85	103	289	103	85
18	324	90	102	324	102	90	90	102	324	102	90
19	361	95	101	361	101	95	95	101	361	101	95
20	400	100	100	400	100	100	100	100	400	100	100
21	441	105	99	441	99	105	99	99	441	99	105
22	484	110	98	484	98	110	98	98	484	98	110
23	529	115	97	529	97	115	97	97	529	97	115
24	576	120	96	576	96	120	96	96	576	96	120
25	625	125	95	625	95	125	95	95	625	95	125
26	676	130	94	676	94	130	94	94	676	94	130
27	729	135	93	729	93	135	93	93	729	93	135
28	784	140	92	784	92	140	92	92	784	92	140
29	841	145	91	841	91	145	91	91	841	91	145
30	900	150	90	900	90	150	90	90	900	90	150
31	961	155	89	961	89	155	89	89	961	89	155
32	1024	160	88	1024	88	160	88	88	1024	88	160
33	1089	165	87	1089	87	165	87	87	1089	87	165
34	1160	170	86	1160	86	170	86	86	1160	86	170
35	1225	175	85	1225	85	175	85	85	1225	85	175
36	1296	180	84	1296	84	180	84	84	1296	84	180
37	1369	185	83	1369	83	185	83	83	1369	83	185
38	1444	190	82	1444	82	190	82	82	1444	82	190
39	1521	195	81	1521	81	195	81	81	1521	81	195
40	1600	200	80	1600	80	200	80	80	1600	80	200
41	1681	205	79	1681	79	205	79	79	1681	79	205
42	1764	210	78	1764	78	210	78	78	1764	78	210
43	1849	215	77	1849	77	215	77	77	1849	77	215
44	1936	220	76	1936	76	220	76	76	1936	76	220
45	2025	225	75	2025	75	225	75	75	2025	75	225
46	2116	230	74	2116	74	230	74	74	2116	74	230
47	2209	235	73	2209	73	235	73	73	2209	73	235
48	2304	240	72	2304	72	240	72	72	2304	72	240
49	2401	245	71	2401	71	245	71	71	2401	71	245
50	2500	250	70	2500	70	250	70	70	2500	70	250
51	2601	255	69	2601	69	255	69	69	2601	69	255
52	2704	260	68	2704	68	260	68	68	2704	68	260
53	2809	265	67	2809	67	265	67	67	2809	67	265
54	2916	270	66	2916	66	270	66	66	2916	66	270
55	3025	275	65	3025	65	275	65	65	3025	65	275
56	3136	280	64	3136	64	280	64	64	3136	64	280
57	3249	285	63	3249	63	285	63	63	3249	63	285
58	3364	290	62	3364	62	290	62	62	3364	62	290
59	3481	295	61	3481	61	295	61	61	3481	61	295
60	3600	300	60	3600	60	300	60	60	3600	60	300



Théorème de Ptolémée

Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Un cas spécial du Théorème de Ptolémée (quand le côté AD est le diamètre du cercle) nous conduit aux identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= (\sin\alpha \cdot \cos\beta) \pm (\cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= (\cos\alpha \cdot \cos\beta) \mp (\sin\alpha \cdot \sin\beta) \end{aligned}$$

L'équivalent de la formule for $\sin(\alpha - \beta)$ avec la formule de l'angle moitié a permis à Ptolémée de construire effectivement ses tables trigonométriques.

Dans le monde arabo-musulman

C'est aussi pour les besoins de l'astronomie que se développe la trigonométrie plane et sphérique.

À Bagdad au IX^e siècle sous l'impulsion du calife al-Ma'mûn la **Maison de la Sagesse** est en plein essor. Elle comporte une bibliothèque, mais aussi un centre de copies et de traductions et un centre de réunions. Les livres grecs sont acquis parfois comme prises de guerre, dans l'empire byzantin, puis traduits en arabe. La société musulmane s'estime alors héritière de la science antique.

A la Maison de la Sagesse, les mathématiciens astronomes vont bénéficier non seulement des traductions des textes grecs de Ménélaüs et Ptolémée, mais aussi des apports des notions de sinus et de *sinus verse* ($1 - \cos$) provenant de l'astronomie indienne ainsi que des tables astronomiques d'origine persane (connaissances qui n'étaient pas connues des mathématiciens grecs). Ils critiquent ces textes et les enrichissent grâce à des observations régulières des planètes et des constellations.

Les astronomes arabes s'intéressent aussi bien aux problèmes pratiques qu'aux aspects théoriques.



- **amélioration de l'astrolabe** : pour mesurer les positions des objets célestes, pour définir l'orientation des mosquées vers La Mecque, pour fixer les moments des cinq prières quotidiennes



- **vérification et amélioration des anciennes tables** : les astronomes ont de plus en plus d'exigences ; ils ne se contentent plus des anciennes tables ; ils vérifient les paramètres hérités des grecs puis faisant une synthèse des apports grecs et indiens, les astronomes essaient de démontrer les règles qui figurent dans les traités d'astronomie et les tables de sinus ou de cordes.

Ces efforts vont donner naissance à une floraison de traités, mathématiques d'une part, sur la "figure secteur" (le théorème de Ménélaüs), astronomiques d'autre part, les *zīj* (i.e. tables, *zīj* d'al-Battānī, *zīj* d'al-Farhānī, fin du IX^e siècle).

C'est dans le *zīj* de **Habash al-Hasib** dit "le calculateur", (originaire d'Égypte et contemporain d'al-Khwārizmī) que sont définis clairement le sinus et le sinus verse ; c'est également Habash qui le premier définit la tangente et en établit une table. Ceci passera cependant presque inaperçue. Il faudra attendre l'Almageste d'**Abū al-Wafā** (fin du Xe siècle) pour que son importance soit reconnue.

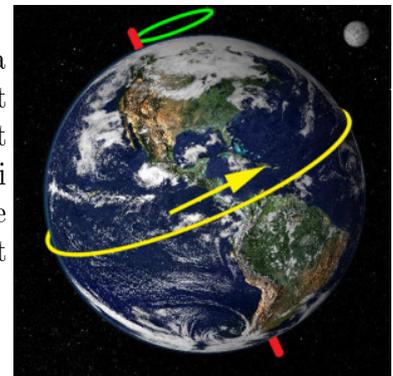
La découverte, au Xe siècle, du théorème des sinus dans le plan et du théorème des sinus sur la sphère (proportionnalité des sinus et des arcs correspondants des triangles sphériques), dont plusieurs mathématiciens, parmi lesquels Abū al-Wafā' al-Buzjānī, se disputent la paternité, sera la pierre de touche du renouveau de la trigonométrie sphérique.



Le *Traité du quadrilatère* de **Nasir al-Din al-Tusi** (1201-1274), synthèse complète des traités précédents, est considéré comme le plus important de la trigonométrie arabe. Nasir al-Din al-Tusi réalise des tables extrêmement précises du mouvement des planètes dans son ouvrage *Zij-i ilkhani* (*Tables ilkhaniennes*). Ce livre contient des tables pour calculer les positions des planètes ainsi que les noms des étoiles. Le système planétaire qu'il avait imaginé était le plus avancé de son temps et fut utilisé de manière intensive jusqu'à ce que Copernic développe son modèle héliocentrique. Entre Ptolémée et Copernic, il est considéré comme le savant le plus éminent sur ce sujet. (ref. Wikipédia)

De cet ouvrage a été tirée la Table des longitudes et des latitudes publiée en latin par Greaves, Londres, 1652.

Il avait également calculé une valeur de 51" par an pour la précession des équinoxes (la valeur actuellement admise étant d'environ 50 secondes), et a contribué à la construction et l'utilisation de nombreux instruments astronomiques, parmi lesquels des astrolabes. Il a par ailleurs réalisé la première publication des principes complets de la trigonométrie plane et sphérique.



Une partie de ces ouvrages arabes ont été traduits en latin au XIIème siècle.

La trigonométrie arabe, a cependant du mal à se dégager de l'astronomie et à constituer un chapitre autonome de géométrie. C'est vraisemblablement ce fait qui va freiner, voire même arrêter, son développement ultérieur; il faudra que la trigonométrie passe dans le monde latin, débarrassée d'une partie des traditions du calcul astronomique pour pouvoir donner lieu à de nouveaux développements[1].

Références

- [1] Hélène Bellosta (Institut français d'études arabes de Damas) *À propos des sciences arabes* SMF - Gazette - 82, octobre 1999.
- [2] Ptolémée Claude. *Almageste (Les compositions mathématiques)*. Edition et traduction M. Halma 1816. Site Gallica de la B.N.F. <http://gallica.bnf.fr>
- [3] Chaogui Zhang. *History of Mathematics : Greek Trigonometry*. Department of Mathematics, Marywood University. <http://math.marywood.edu/czhang>
- [4] Tangente. *L'invention de la Trigonométrie*. Hors série n°30, Histoire des mathématiques
- [5] Les Géomètres de la Grèce antique. Les génies de la Science, n°21. Pour la Science 2004, p92